O método – Aprender a aprender

“Aquele que adora praticar sem estudar a teoria é como o marinheiro que embarca sem navio, sem leme e compasso, e nunca sabe onde pode ir parar.” Leonardo da Vinci (1452-1519)

“A primeira coisa que eles procuram na Google, é a tua capacidade de aprender coisas novas rapidamente.”
Laszlo Bock, former SVP of People Operations at Google

Estatística (Ciência dos dados)

“O pensamento estatístico será um dia tão necessário como qualificação para uma cidadania eficiente como a capacidade de ler e escrever.”
H.G. Wells (Escritor inglês, ficção ciêntifica, 1866 – 1946)

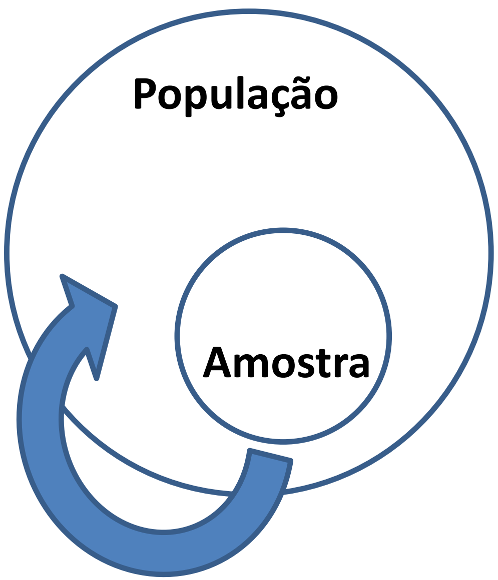
“O próximo século será seguramente o século dos dados.”
David Donoho (in 2000, 1957 -)

“But people don’t want data. They want answers!”
David Hand (1950 -)

“A probabilidade é como o bastão usado pelo cego para sentir seu caminho. Se ele pudesse ver, ele não precisaria da bengala, tal como se soubéssemos qual o cavalo mais rápido, não precisamos de teoria da probabilidade.”
Stanislaw Lem (1921 - 2006)

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

2.1 – Introdução à Teoria da Probabilidade



Por razões económicas, logísticas, para evitar erros de vária ordem, só em casos excepcionais, se analisa a população.

Inferência indutiva → **Incerteza**

Rigor → **Quantificação da incerteza**

↓

Teoria da Probabilidade

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- **A Teoria da Probabilidade permite quantificar a incerteza.**

- **Objecto da teoria da probabilidade:** é o estudo de certos **fenómenos observáveis, influenciados pelo acaso**, ou seja, o estudo dos **fenómenos aleatórios.**

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

“experiência” aleatória

O que caracteriza uma experiência aleatória?

1. Conjunto de resultados possíveis ser conhecido

2. O resultado da experiência nunca poder ser previsto de forma exacta mesmo que se tente reproduzir exactamente as circunstâncias relevantes para o resultado.

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Constituem exemplos de experiências aleatórias:

a) Lançamento de uma moeda e observação do lado que fica para cima.

b) Lançamento de um dado e registo do número de pontos obtido.

c) Tiragem de uma carta de um baralho e anotação do naipe.

d) Registo do número de sinistros por apólice do ramo automóvel durante uma anuidade.

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

e) Observação das receitas de uma amostra de agregados familiares colectadas através de um inquérito ao custo de vida realizado numa cidade.

f) Observação da duração de componentes electrónicos de determinado tipo.

g) Observação das taxas de inflação em anos sucessivos.

h) Observação do partido vencedor das próximas eleições legislativas.

i) Registo do número de equipas de futebol vencedoras em casa na próxima jornada do campeonato da 1ª liga.

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Acontecimento elementar ω

Espaço resultados\ amostra Ω

Acontecimento *A=saída de número maior que 4*

Resumindo:

Espaço resultados → Todos os acontecimentos

Acontecimento elementar → Um elemento do espaço resultados

Acontecimento → Dois ou mais elementos do espaço resultados

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Espaço de resultados. Acontecimento

Definição 2.2 – **Espaço de resultados ou espaço-amostra.**

Denomina-se espaço de resultados ou espaço-amostra, e representa-se por Ω, o conjunto fundamental (não vazio) formado por todos os resultados que é possível obter quando se efectua determinada experiência aleatória.

Os resultados individuais, pontos ou elementos de Ω, são representados por ω.

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Classificação dos espaços de resultados

Espaço de resultados

- **discretos**
  - **finitos**

    Lançamento de uma moeda.

    $\boldsymbol{\Omega}$ = {F,C}={0, 1}
  - **infinitos numeráveis**

    Nº telefonemas recebidos por hora numa central telefónica $\boldsymbol{\Omega}$ = {0,1, 2,...}.
- **contínuos**

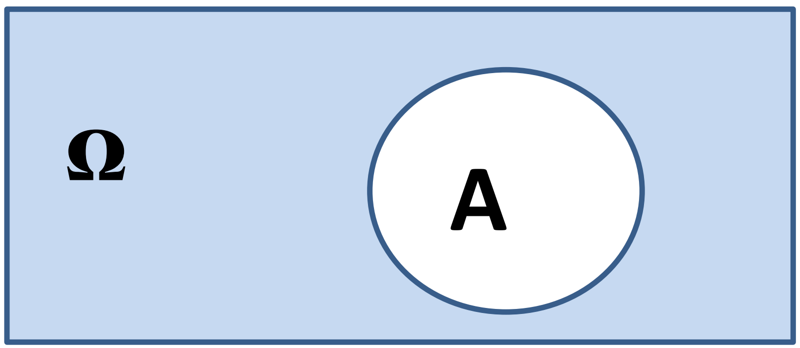
  Duração de uma Lâmpada

  $$\boldsymbol{\Omega} = \{x : x > 0\}$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Definição 2.3 – Acontecimento.

Chama-se acontecimento a um subconjunto do espaço $\boldsymbol{\Omega}$.



Se $A = \{\omega\}$ *diz-se que é um* ***acontecimento elementar****.*

$\boldsymbol{\Omega}$ *é também um acontecimento.*

Definição 2.4 – Realização de um acontecimento.

Ao efectuar a experiência aleatória associada com $\boldsymbol{\Omega}$, diz-se que o acontecimento A $\subset \boldsymbol{\Omega}$ se realiza, se o resultado da experiência é um ponto ω que pertence a A: $\omega \in$ A.

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Espaço de resultados é importante porque permite definir os acontecimentos

mas

De maior interesse são os acontecimentos e as famílias de acontecimentos a partir dele definidos

Exemplo: Considere-se a experiência aleatória lançamento de duas moedas $\boldsymbol{\Omega} = \{FF, FC, CF, CC\}$

Neste espaço de resultados podemos definir os acontecimentos:

$A = \{FC, CF\}$ =«saída de exactamente uma face ou uma coroa»;

$B = \{FF, FC\}$ =«saída de uma face na primeira moeda»;

$C = \{FC, CF, CC\}$ =«saída de pelo menos uma coroa».

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Exemplo 2.8 – Lançamento de dois dados e observação do par (i, j)número de pontos saído no primeiro e no segundo dados. $\Omega = \{(i, j)\colon\ i, j = 1,2,3,4,5,6\}. \# \Omega = 36$

São acontecimentos do espaço Ω:

Cada par (i, j) $i, j = 1,2,3,4,5,6$ é acontecimento elementar

$A = \{(4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$ = «saída de apenas 4 ou 5 pontos»;

$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$ = «saída de soma de pontos dos dois dados inferior a 5».

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Exemplo 2.9 – Duração de uma lâmpada $\boldsymbol{\Omega} = \{x : x > 0\}$

São acontecimentos do espaço Ω:

$A = \{x : 500 < x < 1000\}$ = «lâmpada dura entre 500 e 1000 horas»;

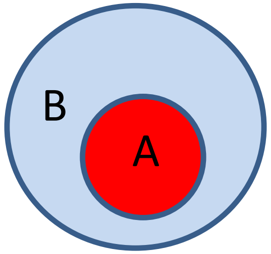
$\mathrm{B} = \{x : x \leq 500\}$ = «lâmpada dura menos de 500 horas»;

C =$\{x : x > 600\}$ = «lâmpada dura mais de 600 horas».

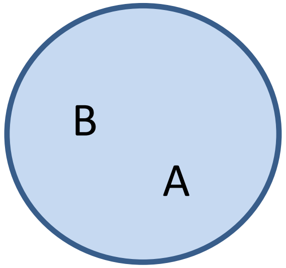
CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- A álgebra de acontecimentos constrói-se por analogia com a álgebra de conjuntos. Algumas situações de maior interesse:

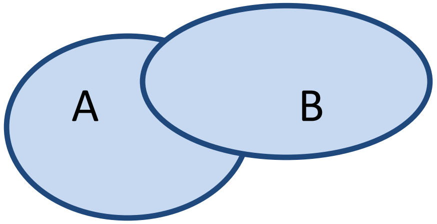
Implicação de acontecimentos – a realização de A implica a realização de B se e só se, todo o elemento de A é elemento de B: $A \subset B$.



Identidade de acontecimentos – A e B são acontecimentos idênticos se e só se, possuem os mesmos elementos: $A = B \Rightarrow A \subset B \; e \; B \subset A$



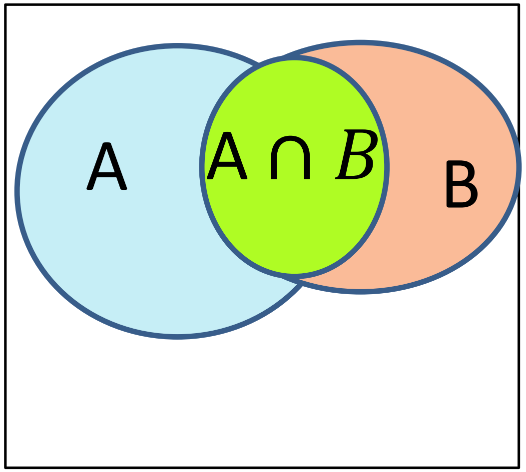
União de acontecimentos – A união de dois acontecimentos A e B, $A \cup B$ é o acontecimento que se realiza quando pelo menos um deles se realiza.



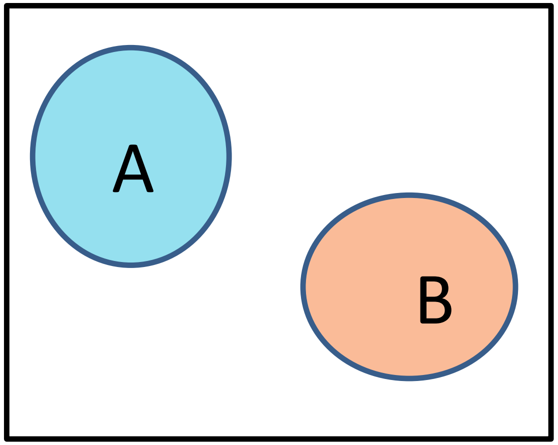
Acontecimento impossível: Ø.

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Intersecção de acontecimentos – A intersecção de dois acontecimentos A e B, $A \cap B$, é o acontecimento que se realiza quando ambos se realizam.

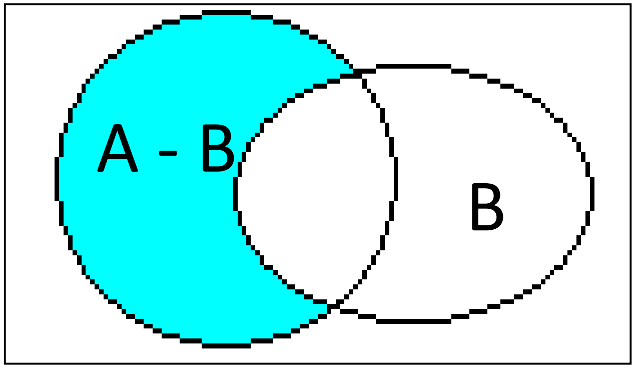


Dois **acontecimentos** A e B são **incompatíveis** ou mutuamente exclusivos se e só se a realização de um implica a não realização do outro. $A \cap B = \emptyset$



CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

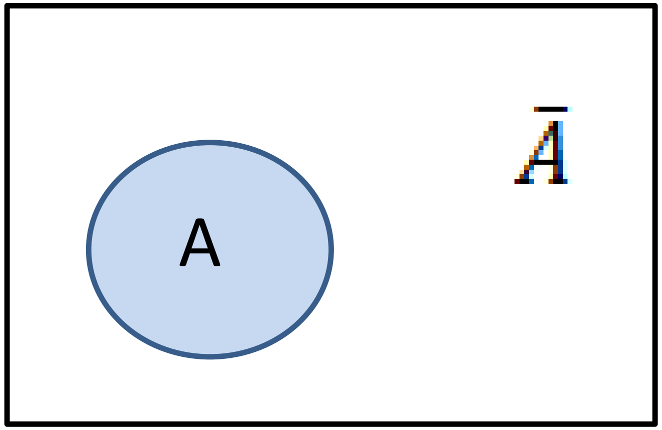
Diferença de acontecimentos – a diferença entre os acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza se e só se A se realiza sem que se realize B: $A - B$.



Acontecimento complementar de $\boldsymbol{A}$ designa – se por $\bar{\boldsymbol{A}}$

$$\bar{A} = \Omega - A \quad \Rightarrow \quad A \cup \bar{A} = \Omega$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$



CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Algumas propriedades das operações definidas sobre acontecimentos:

1. Associatividade: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

2. Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

3. Distributividade: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. Leis de De Morgan: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

5. $União\ numerável\ de\ acontecimentos\ A_{1,} A_{2,} \cdots, A_{n,} \cdots = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$

6. $Intersecção\ numerável\ de\ acontecimentos\ A_{1,} A_{2,} \cdots, A_{n,} \cdots = \cap_{i=1}^{\infty} A_i$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- **Medida de probabilidade**

Provável, plausível, credível, possível, etc.,

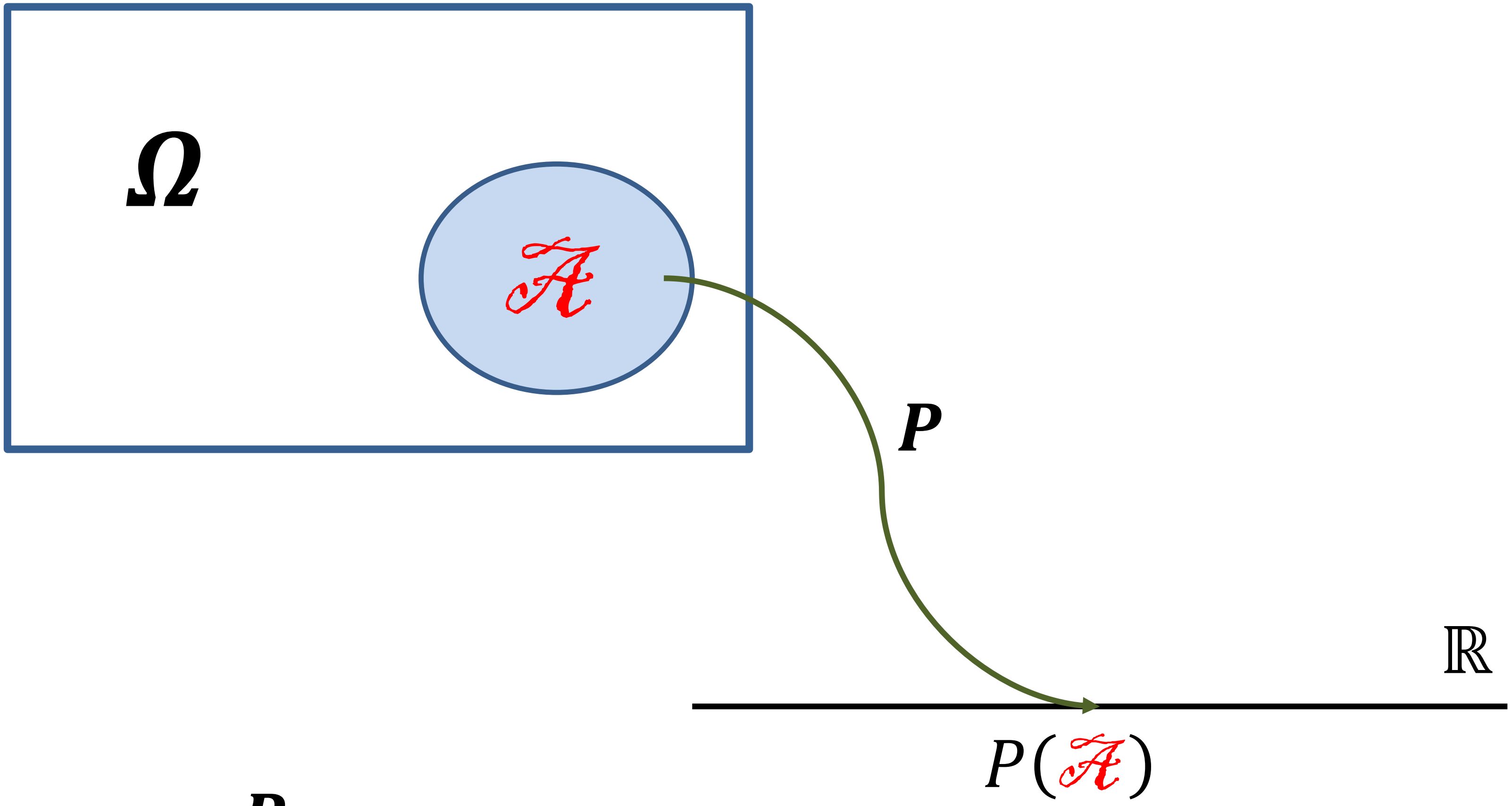
Probabilidade quantifica o grau de incerteza atribuído à realização de acontecimentos incertos ou que não se controlam.

A **medida de probabilidade pode ser formalizada através de um número reduzido de proposições fundamentais – axiomas.**

Axiomática de Kolmogorov

A partir destes é possível obter, por dedução lógica, proposições ou teoremas que, dão corpo à teoria matemática da probabilidade.

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE



$$\mathscr{A} \subset \boldsymbol{\Omega} \xrightarrow{\boldsymbol{P}} P(\mathscr{A}) \subset \mathbb{R}$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Axiomática de Kolmogorov

A medida de probabilidade $P(A)$, *probabilidade do acontecimento* A, verifica os três axiomas seguintes:

$P1$ – $P(A) \geq 0.$

$P2$ – $P(\Omega) = 1.$

P3 – Se A *e* B *forem acontecimentos incompatíveis,*

$A \cap B = \emptyset$, *então,* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- Em muitas situações deve-se substituir o axioma P3 pelo seguinte (generalização):

P3* – Se se tiver uma

$$União\ numerável\ de\ acontecimentos$$

$$A_{1,} A_{2,} \cdots, A_{n,} \cdots \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i$$

dois a dois incompatíveis, $A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$

então $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

• Propriedades da medida de probabilidade:

1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2) $P(\emptyset) = 0$ *(*).*

3) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$.

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

5) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

6) $P(A) \leq 1$.

Estas propriedades podem **demonstrar-se sem grande dificuldade.**

(*) Podem existir acontecimentos com probabilidade nula que não sejam impossíveis

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- **Exemplo 2.12 –** Em determinada população, 9.8% das pessoas adquirem a revista *A*, 22.9% a revista *B e 5.1% ambas as revistas. Admite-se que a medida de probabilidade* é a proporção dos indivíduos da população que adquirem as revistas. Sejam:

Acontecimentos $A \equiv$ *«adquirir a revista A»;*

$B \equiv$ *«adquirir a revista B».*

(a) A probabilidade de adquirir somente a revista *A ?*

(b) A probabilidade de adquirir pelo menos uma das revistas?

(c) A probabilidade de não adquirir nem a revista *A, nem a revista B?*

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- Tirando os casos $P(\emptyset) = 0$ *e* $P(\Omega) = 1$, *a teoria da probabilidade não ensina o* modo de atribuir uma probabilidade a um dado acontecimento, mas ensina a calcular as probabilidades de certos acontecimentos a partir das probabilidades de outros acontecimentos normalmente mais simples do que os primeiros.

A atribuição de probabilidades a um acontecimento depende do conhecimento que se tem do sistema que descreve a experiência aleatória em causa ou, até, da interpretação que é dada ao conceito de probabilidade.

Apresentam-se 3 interpretações deste conceito: **clássica, frequencista e subjectiva.**

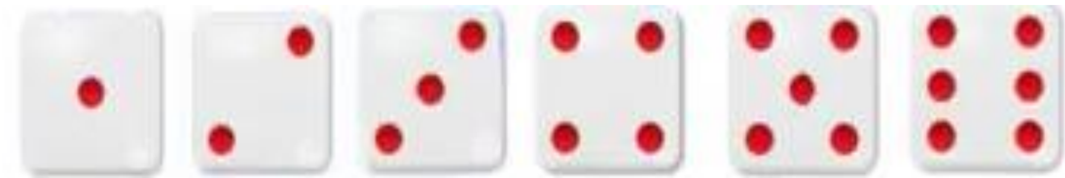
CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

2.4 - Interpretações do conceito de probabilidade.

1. Interpretação clássica, De Moivre (1718), explicitada por Laplace no princípio do século XIX. Laplace adoptou o esquema dos resultados "**igualmente possíveis ou prováveis",** motivado por problemas levantados no domínio dos "jogos de azar".

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Seja a experiência aleatória lançamento de um dado.



Espaço resultados

$\boldsymbol{\Omega}$ $=\{\omega_i \;\; i=1,\ldots,6\}$

$\#\boldsymbol{\Omega}=6$

E o acontecimento 

$A=\{$saída de face com valor 3 ou 4$\}\Rightarrow \#A=2$ $\qquad P(A)=?$

$$\boldsymbol{P(A)=\frac{\#\,A}{\#\,\Omega}=\frac{número\ de\ casos\ favoráveis\ a\ A}{número\ de\ casos\ possíveis}=\frac{2}{6}}$$

Princípio da Equiprobabilidade:

Todos os resultados são igualmente possíveis,

$\boldsymbol{P(\omega_i)}=\frac{\mathbf{1}}{\#\boldsymbol{\Omega}}=\frac{\mathbf{1}}{n}\;\;(i=1,2,\cdots,6)$ $\qquad n=\#\boldsymbol{\Omega}$ tem de ser finito

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

2.4 - Interpretações do conceito de probabilidade

Princípio da Equiprobabilidade ↔ Princípio da Indiferença

Podemos tratar todos os resultados como igualmente possíveis se não existir qualquer razão para considerar que um resultado é mais provável que outro.

Princípio da Indiferença pressupõe:

- Não existe qualquer evidência de que um resultado seja mais provável que outro

- Existe uma simetria em cada acontecimento elementar que nos diz que a probabilidade de realização de qualquer deles é igual para todos ("perfeição")

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- **Exemplo 2.14 – Lançamento de duas moedas "perfeitas",**

$$\boldsymbol{\Omega = \{FF, FC, CF, CC\} \Leftrightarrow \# \ \Omega = 4.}$$

A —*«saída de exactamente uma face ou uma coroa»*$\equiv \{FC, CF\} \Rightarrow P(A) = 1/\ 2$

B —*«saída de uma face na primeira moeda»* $\equiv \{FF, FC\} \Rightarrow P(B) = 1/\ 2$

C —*«saída de pelo menos uma coroa»* $\equiv \{FC, CF, CC\} \Rightarrow P(C) = 3/4$

Exemplo 2.15 – Lançamento de dois dados "perfeitos", $\#\boldsymbol{\Omega}=36$

$A -$ «$soma\ igual\ a\ 6\ pontos$»$\equiv\{(\mathbf{1},\mathbf{5}),(\mathbf{5},\mathbf{1}),(\mathbf{2},\mathbf{4}),(\mathbf{4},\mathbf{2}),(\mathbf{3},\mathbf{3})\}$

$P(A) = 5\ /\ 36$

$B -$
«$a\ mesma\ face\ nos\ dois\ dados$»$\equiv\{(\mathbf{1},\mathbf{1}),(\mathbf{2},\mathbf{2}),(\mathbf{3},\mathbf{3}),(\mathbf{4},\mathbf{4}),(\mathbf{5},\mathbf{5}),(\mathbf{6},\mathbf{6})\}$

$P(B) = 6\ /\ 36$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- **Exemplo 2.16 – Lança-se ao acaso uma moeda e depois um dado.**

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (F,1),(F,2),(F,3),(F,4),(F,5),(F,6), \\ (C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6) \end{Bmatrix}$$

- **O número de casos possíveis** é $2 \times\ 6\ =\ 12.$

$A\ -$ sair a face acompanhada por um número ímpar

$\mathrm{A} = \{(F,1),(F,3),(F,5)\} \Rightarrow P(A) = 1/4$ pois há três casos favoráveis.

$B\ -$sair a face acompanhada por um número ínferior a 3

$\mathrm{B} = \{(F,1),(F,2)\} \Rightarrow P(B) = 1/6$ pois há dois casos favoráveis.

$C\ \ -$ sair a coroa acompanhada por um número entre 2 e 5, inclusivé

C$= \{(C,2),(C,3),(C,4),(C,5)\} \Rightarrow P(C) = 1/3$ pois há quatro casos favoráveis.

- **Análise combinatória**

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- A interpretação clássica manteve a sua força até ao começo do presente século, apesar das críticas que lhe foram dirigidas.

- No entanto, não existem moedas perfeitas, dados perfeitos, gases perfeitos, água pura, etc. Consequentemente o conceito clássico é muitas vezes aplicado em situações idealizadas e não consegue vencer a dificuldade levantada quando os casos não são igualmente possíveis\prováveis. E como calcular probabilidades quando o número de casos possíveis não é finito nem sequer numerável?

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

2. interpretação frequencista

- A ideia fundamental é a repetição de provas ou experiências idênticas e independentes. Os resultados obtidos ao cabo de uma longa série de **repetições patenteiam uma impressionante regularidade estatística quando** tomados em conjunto.

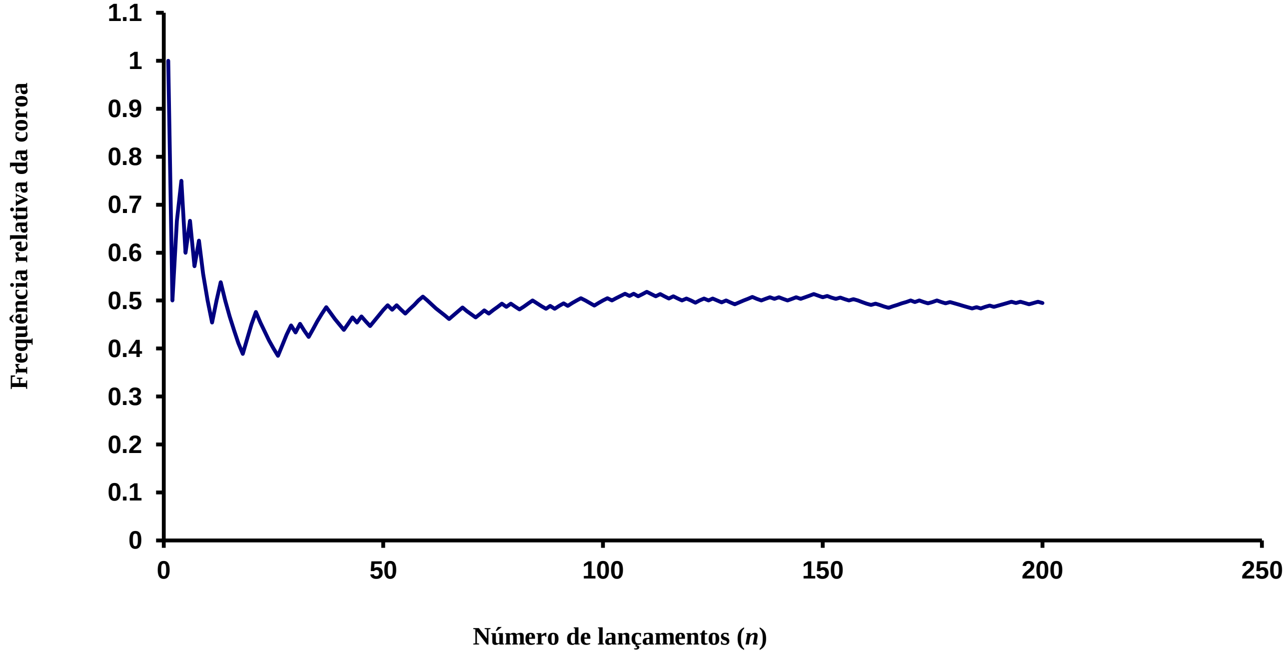
Seja um acontecimento $A \subset \Omega$. *A frequência relativa de* A *é:*

$$f_n(A) = \frac{F_{n\,(A)}}{n} = \frac{\textit{frequência absoluta de } A}{\textit{número de repetições}}$$

Quando aumenta o número de repetições há uma tendência para a **estabilização da frequência relativa em torno de um número que "será" $P(A)$.**

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- **Exemplo 2.17 –** (interpretação frequencista) Lançou-se 200 vezes uma moeda de aparência regular e registou-se ao fim de cada lançamento a frequência relativa do acontecimento *A* «saída da coroa».



CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- Então, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe um número de provas n, a partir do qual,

$P(A) - \varepsilon < f(A) < P(A) + \varepsilon$, é praticamente certo.

(2.4) $\lim_{n\to\infty} P[|f(A) - P(A)| < \epsilon] = 1$

lei dos grandes números

Fixado $\boldsymbol{n}$, as frequências relativas verificam a axiomática de Kolmogorov.

Que fazer quando a situação **não é repetitiva nem simétrica?**

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- **Interpretação subjectiva** ou personalista –

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- **Métodos de contagem**

Definição 2.6 – Regra fundamental da contagem
Suponha-se que uma experiência aleatória é composta por *k* etapas. Se na primeira etapa há m_1 casos possíveis, na segunda etapa há m_2 casos possíveis,..., na *k*-ésima etapa há m_k casos possíveis, então, o número total de resultados da experiência aleatória, combinando as *k* etapas, é $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k$.

2 conceitos importantes (definições 2.7, 2.8 e 2.9)

- Amostra ordenada vs não ordenada
- Amostragem com ou sem reposição

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Conceitos de **análise combinatória** a ter presentes:

Exemplo: Com 4 peças de pano de cores diferentes quantas bandeiras tricolores de faixas verticais podem elaborar-se sem repetir as cores?

Amostras ordenadas sem reposição

Arranjos. Conjunto com *n* elementos distintos. Quantos grupos com *k* elementos **não repetidos** que diferem pela **ordem** de selecção se podem formar?

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Conceitos de **análise combinatória** a ter presentes:

Exemplo: Quantos tapetes diferentes constituídos por faixas de 5 cores diferentes é possível fazer? Qualquer alteração da ordem das cores dá um tapete diferente.

Permutações. As permutações de um conjunto de ***n*** elementos distintos são arranjos de ***n*** elementos tomados ***n*** a ***n***, isto é, cada grupo é formado por todos os elementos do conjunto.

$$P(n) = A_n^n = n!$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Conceitos de **análise combinatória** a ter presentes:

Exemplo: Quantos grupos de 5 letras (eventualmente repetidas) é possível construir com um alfabeto de 26 letras?

Amostras ordenadas com reposição

Arranjos completos. Quando nos arranjos entram elementos **repetidos** do conjunto dado diz-se que se trata de arranjos com repetição ou arranjos completos

$$\alpha_k^n = n^k$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- Conceitos de **análise combinatória** a ter presentes:

Exemplo: Num restaurante existem 10 menus diferentes. Quantos conjuntos de 5 menus diferentes é possível elaborar a partir desses 10?

Amostras não ordenadas sem reposição

Combinações. Conjunto com *n* elementos distintos. Quantos grupos com *k* elementos $(1 \leq k \leq n)$ **não repetidos** que **não diferem pela ordem** com que foram seleccionados se podem formar?

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- **Permutações de elementos não todos distintos**. Dados *n* elementos dos quais k_1 são de um primeiro tipo e não se distinguem entre si, k_2 são de um segundo tipo e não se distinguem entre si e, finalmente, k_r são de um último tipo, também indistintos, havendo no total *r* tipos diferentes,

  $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$, o número de permutações de elementos não todos distintos é dado pela expressão

$$\frac{n!}{k_1!\times k_2!\times\cdots\times k_r!}$$

Coeficiente multinomial

- Quando se consideram apenas dois grupos, isto é, $r = 2$, tem-se o **coeficiente binomial** que assume o valor dado pelas combinações de *n* elementos *k* a *k* .

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

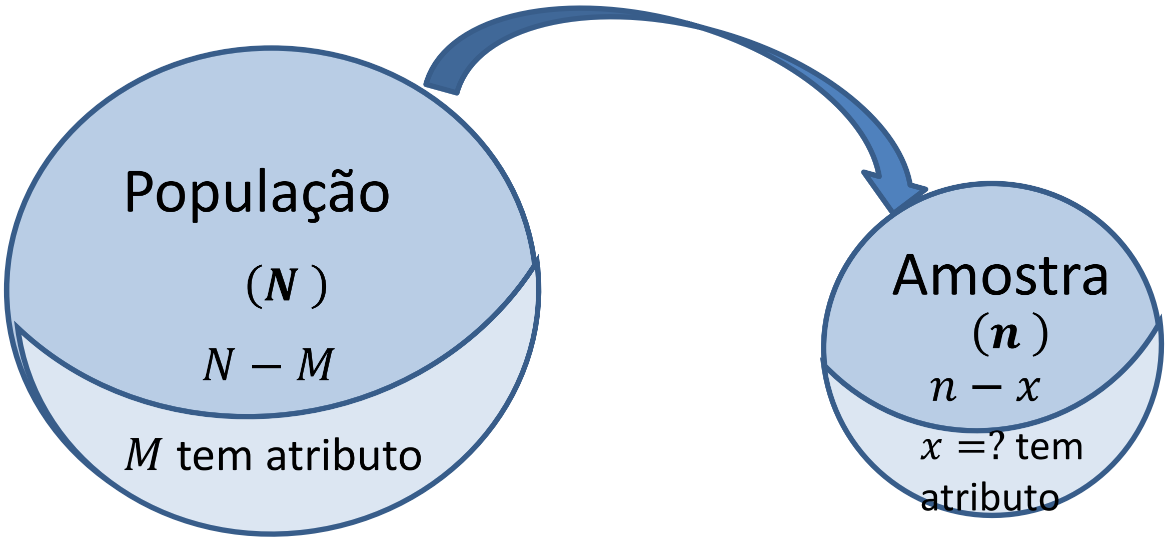
- **Permutações de elementos não todos distintos**.

Exemplo: Com 9 bolas de 3 cores diferentes, 3 pretas, 4 verdes e 2 amarelas, quantos grupos diferentes é possível formar?

Com 7 bolas de 2 cores diferentes, 3 pretas e 4 verdes quantos grupos diferentes é possível formar?

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- Uma aplicação particularmente importante da análise combinatória consiste na resolução do seguinte problema:



$(0 \leq x \leq n)$

A resposta à pergunta depende da tiragem ser feita:

<u>Sem reposição</u> ⟶ **esquema hipergeométrico**

<u>Com reposição</u> ⟶ **esquema binomial**

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- Tiragem sem reposição $\rightarrow$ **esquema hipergeométrico**.

número de casos possíveis: C_n^N

elementos com o atributo na pop.

elementos sem o atributo

número de casos favoráveis: $\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}$

elementos com o atributo na amostra

elementos sem o atributo

$x \geq max\{0, n-(N-M)\}$ e $x \leq min\{n, M\}$

Então vem: $P(x) = \dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- Tiragem com reposição $\rightarrow$ **esquema binomial**

número de casos possíveis: $\boldsymbol{\alpha_n^N = N^n}$

número de casos favoráveis: $\overbrace{M^x}^{\alpha_x^M}\overbrace{(N-M)^{n-x}}^{\alpha_{n-x}^{N-M}}\binom{n}{x}$

Então vem:

$$P(x) = \frac{M^x(N-M)^{n-x}\binom{n}{x}}{N^n} = \binom{n}{x}\frac{M^x}{N^x}\frac{(N-M)^{n-x}}{N^{(n-x)}} = \binom{n}{x}p^x q^{(n-x)}$$

Onde: $p = \frac{M}{N}$, $q = \dfrac{N-M}{N} = 1 - \mathrm{p}$

No esquema binomial, apenas interessa a **proporção** – p e não os valores de N e de M.

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Esquema hipergeométrico

exemplo: Num lago existem 100 peixes dos quais 10 são vermelhos. Se se pescarem ,aleatoriamente e **sem reposição**, 5 peixes, qual a probabilidade de nenhum ser vermelho?

$$\boldsymbol{P_s = \frac{\binom{10}{0}\binom{100-10}{5-0}}{\binom{100}{5}}}$$

Esquema binomial

exemplo: Num lago existem 100 peixes dos quais 10 são vermelhos. Se se pescarem ,aleatoriamente e **com reposição**, 5 peixes, qual a probabilidade de 2 serem vermelhos?

$$\boldsymbol{P_r = \binom{5}{2} 0.1^2 \times 0.9^3}$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Definição 2.10 – Probabilidade condicionada

Dados dois acontecimentos A e B, a probabilidade de A se realizar sabendo que B se realizou ou a probabilidade de A condicionada por B, designada por $P(A|B)$, é definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A probabilidade condicionada **é uma medida de probabilidade** (verifica axiomática de Kolmogorov);

Uma vez conhecida a realização de *B*, o espaço de resultados deixa de ser $\boldsymbol{\Omega}$ e passa a ser o conjunto *B*.

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Interpretação: uma reavaliação da probabilidade de um acontecimento quando se tem a informação de que outro acontecimento se realizou.

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Exemplo 2.28 – No Totoloto há 49 números. Jogando com 6 números a probabilidade de obter o primeiro prémio é:

$$\frac{1}{\binom{49}{5}} * \frac{1}{13} = \frac{5! * 44!}{49!} * \frac{1}{13} = 4{,}03397E - 08$$

Acertando o primeiro número, a probabilidade de ganhar o primeiro prémio passa a ser:

$$\frac{\frac{5! * 44!}{49!} * \frac{1}{13}}{\binom{5}{1} * \frac{1}{49}} = \frac{4! * 44!}{48!} * \frac{1}{13} = 3{,}95329E - 07$$

Ainda é uma probabilidade muito baixa!

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- **Probabilidade condicionada.**

Exemplo 2.25 – Lançam-se 2 dados e está-se interessado na soma de pontos obtida.

Acontecimento $A = $ « $obter\ uma\ soma\ igual\ a\ 5\ pontos$»

Se se souber que num dos dados se obteve 4 pontos, acontecimento *B*, a probabilidade de *A* deve ser reavaliada, já que nesse caso a realização de *A* equivale agora a obter 1 ponto com o outro dado. E se se souber que num dos dados se obteve 6 pontos, acontecimento C.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- **Probabilidade condicionada.**

- **Exemplo 2.25 –** Lançam-se 2 dados e está-se interessado na soma de pontos obtida.

  Acontecimento *A* = « obter uma soma igual a 5 pontos»

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Se se souber que num dos dados se obteve 4 pontos, acontecimento *B, qual a* $P(A)$?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Se se souber que num dos dados se obteve 6 pontos,

acontecimento C, a $P(A)$ será?

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = 0$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- **Regra da multiplicação das probabilidades:**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A|B) * P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B \cap A) = P(B|A) * P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)$$

com $P(B) > 0$ e\ou $P(A) > 0$

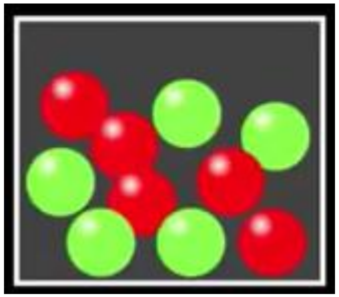
Esta regra generaliza-se facilmente para três ou mais acontecimentos. Por exemplo,

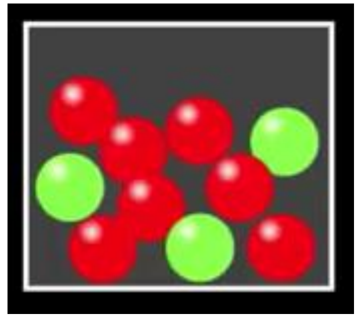
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B)$$

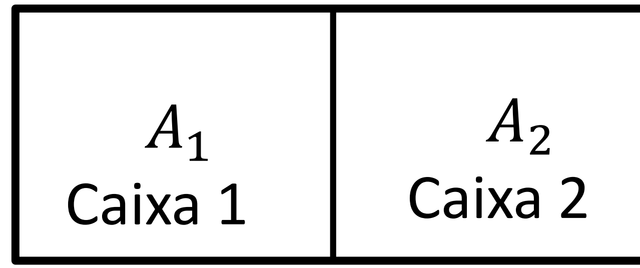
com $P(A \cap B) > 0$,

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Tem-se 2 caixas com bolas vermelhas e verdes.







$$A_1 \cup A_2 = \boldsymbol{\Omega}$$

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$\Rightarrow$ A_1 e A_2 constituem uma **partição do espaço de resultados $\boldsymbol{\Omega}$**

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)}_{axioma\ 3\ da\ medida\ probabilidade} = 1$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Definição 2.11 – Partição do espaço de resultados

Diz-se que a classe de acontecimentos

$\{A_1, A_2, \cdots, A_m, \cdots\} \qquad j = 1, 2, \cdots, m, \cdots$

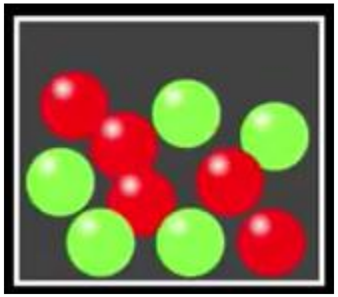
é uma partição de $\boldsymbol{\Omega}$ quando,

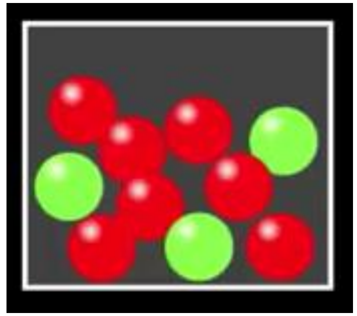
$\cup_j A_j = \boldsymbol{\Omega}$ e $A_i \cap A_j = \emptyset \; (i \neq j)$

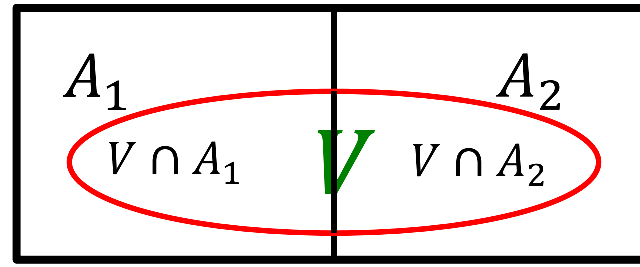
então: $P\left(\cup_j A_j\right) = \sum_j P\left(A_j\right) = 1$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Tem-se 2 caixas com bolas vermelhas e verdes.







Retirada uma bola qual a probabilidade de que seja verde?

$$P(\boldsymbol{V}) = P(\boldsymbol{V} \cap A_1) + P(\boldsymbol{V} \cap A_2)$$

$$= P(\boldsymbol{V}|A_1) * P(A_1) + P(\boldsymbol{V}|A_2) * P(A_2)$$

$$P(\boldsymbol{V}|A_1) = \frac{1}{2}; \; P(\boldsymbol{V}|A_2) = \frac{3}{10}$$

$$P(\boldsymbol{V}) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} + \frac{3}{10} * \frac{1}{2} = \frac{8}{20}$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

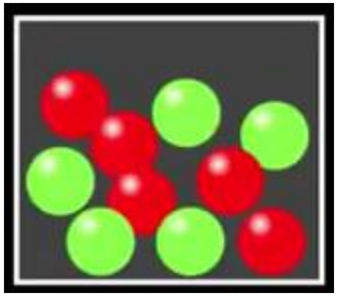
Teorema 2.1 (regra da probabilidade total) – Se $\{A_1, A_2, \cdots, A_m, \cdots\}$ é uma partição de Ω e se $P(A_j) > 0 \ (j = 1, 2, \cdots, m, \cdots)$, para qualquer acontecimento *B*,

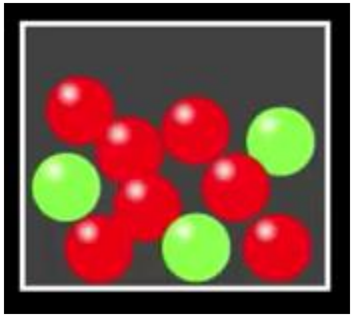
$$P(B) = \sum_j P(B \cap A_j) = \sum_j P(A_j) \times P(B|A_j)$$

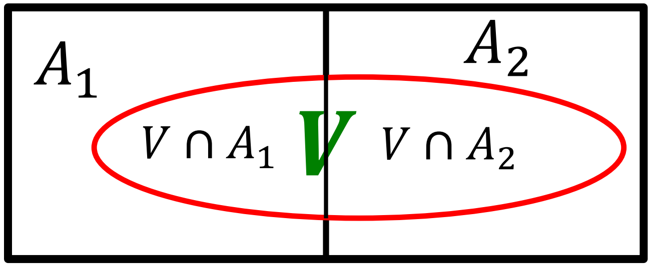
CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Tem-se 2 caixas com bolas vermelhas e verdes.

Sabendo-se que a bola retirada é verde qual a probabilidade de que tenha sido retirada da caixa 2?







$$P(A_2|V) = \frac{P(A_2 \cap V)}{P(V)} = \frac{P(V|A_2) * P(A_2)}{P(V|A_1) * P(A_1) + P(V|A_2) * P(A_2)}$$

$$P(A_2|V) = \frac{\frac{3}{10} * \frac{1}{2}}{\frac{8}{20}} = \frac{3}{8}$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- **Teorema 2.2 (Bayes) –** Se $\{A_1, A_2, \cdots, A_m, \cdots\}$ é uma partição de $\boldsymbol{\Omega}$ e se $P(A_j) > 0 \ (j = 1, 2, \cdots, m, \cdots)$, para qualquer acontecimento B a verificar $P(B) > 0$,

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \times P(B|A_j)}{\sum_j P(A_j) \times P(B|A_j)}, (j = 1, 2, \cdots, m, \cdots)$$

$P(A_j)$ - probabilidade apriori (sem informação adicional)

$P(A_j|B)$ - probabilidade aposteriori (após obter informação adicional)

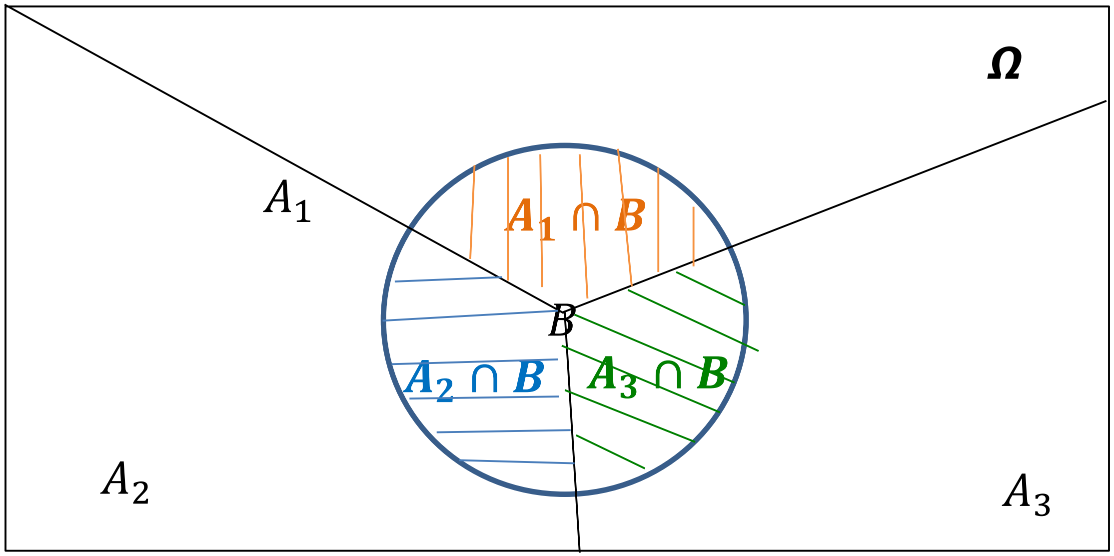
CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- **Exemplo 2.35** – Uma companhia seguradora distribui os segurados por três classes, A_1, A_2, A_3, consoante o menor ou maior risco que se lhes atribui; em certo momento a carteira de apólices tem a seguinte composição: $A_1 = 3500$, $A_2 = 5000$, $A_3 = 1500$. Sabe-se também que a probabilidade de os segurados de cada classe terem um ou mais acidentes durante um ano é, respectivamente, 0.01, 0.04 e 0.15. A companhia, naturalmente, nunca tem a certeza da classe a que pertence o subscritor de uma apólice. Se um segurado tiver um ou mais acidentes durante um ano que conclusão se pode retirar quanto à classe a que pertence?

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

$$P(A_1) = 0{,}35;\ P(A_2) = 0{,}5;\ P(A_3) = 0{,}15$$

$$P(B|A_1) = 0{,}01;\ P(B|A_2) = 0{,}04;\ P(B|A_3) = 0{,}15$$



$$P(B) = \mathrm{P}(\boldsymbol{A_1} \cap \boldsymbol{B}) + \mathrm{P}(\boldsymbol{A_2} \cap \boldsymbol{B}) + P(\boldsymbol{A_3} \cap \boldsymbol{B})$$

$$P(B) = P(\boldsymbol{A_1})P(B|\boldsymbol{A_1}) + P(\boldsymbol{A_2})P(B|\boldsymbol{A_2}) + P(\boldsymbol{A_3})P(B|\boldsymbol{A_3})$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

$$P(A_1) = 0{,}35;\, P(A_2) = 0{,}5;\, P(A_3) = 0{,}15$$

$$P(B|A_1) = 0{,}01;\, P(B|A_2) = 0{,}04;\, P(B|A_3) = 0{,}15$$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

$$= 0{,}35 * 0{,}01 + 0{,}5 * 0{,}04 + 0{,}15 * 0{,}15 = 0{,}046$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0{,}35 * 0{,}01}{0{,}046}$$
$$= 0{,}076$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0{,}5 * 0{,}04}{0{,}046}$$
$$= 0{,}43$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

A_j	$P(A_j)$	$P(B\|A_j)$	$P(A_j)P(B\|A_j)$	$P(A_j\|B)$
A_1	0,35	0,01	0,0035	0,076087
A_2	0,5	0,04	0,02	0,434783
A_3	0,15	0,15	0,0225	0,48913
	1		0,046	1

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- Suponha que é o responsável pela detecção da fonte de erro quando o sistema de computadores falha. Da sua experiência sabe que existem 3 fonte de erros: unidade de disco, memória do computador, sistema operativo.

  Sabe-se que 50% erros tem como fonte erros na unidade de disco.

  A partir dos padrões de desempenho de componentes, sabe-se que a probabilidade de falha do sistema quando se verifica erro na unidade de disco ou erro de memória é de, respectivamente, 60%, 80%. Sabe-se ainda que, tendo sido registada uma falha, ela deve-se a erro de memória em 40% dos casos e que a probabilidade de o sistema falhar é de 60%.

  Qual a probabilidade de que o sistema falhe quando existe erro do sistema operativo?

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

A_j	$P(A_j)$	$P(F\|A_j)$	$P(A_j)P(F\|A_j)$	$P(A_j\|F)$
UD	0,5	0,6	0,3	
M	0,3	0,8	0,24	0,4
SO	0,2	0,3	0,06	
	1		0,6	1

$$P(M|F)=\frac{P(M)P(F|M)}{P(F)}\Leftrightarrow 0{,}4=\frac{P(M)P(F|M)}{0{,}6}\Leftrightarrow P(M)P(F|M)=0{,}4*0{,}6=0{,}24$$

$$P(SO)P(F|SO)=P(F)-P(M)P(F|M)-P(UD)P(F|UD)=0{,}6-(0{,}3+0{,}24)=0{,}06$$

$$P(F|M)=\frac{P(F\cap M)}{P(M)}\Leftrightarrow P(M)=\frac{P(F\cap M)}{P(F|M)}=\frac{0{,}24}{0{,}8}=0{,}3;$$

$$P(F|SO)=\frac{P(F\cap SO)}{P(M)}=\frac{0{,}06}{0{,}2}=0{,}3$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Os dois mais importantes fornecedores de ovos de um supermercado (F1 e F2) fornecem respectivamente 50% e 40% do total de ovos adquiridos pelo supermercado. Alguns dos ovos vêm estragados, tendo-se apurado que, dos ovos estragados, 60% são fornecidos por F1 e 30% por F2. Sabe-se também que a percentagem total de ovos estragados fornecidos por outros fornecedores é de 5%. Qual a percentagem de ovos estragados recebidos pelo supermercado? Qual a percentagem de ovos estragados fornecidos por F1?

	$P(F_i)$	$P(E\|F_i)$	$P(E \cap Fi)$	$P(Fi\|E)$
F1	0,5	**?**		0,6
F2	0,4			0,3
Outros		0,05		
			?	

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

	$P(F_i)$	$P(E\|F_i)$	$P(E \cap Fi)$	$P(Fi\|E)$
F1	0.5	? 0.06	0.03	0.6
F2	0.4			0.3
Foutr	0.1	0.05	0.005	0.1
	1		? 0.05	1

$P(F_{Outros}) = 1 - [P(F1){+}P(F2)]$ $\quad P(E \cap F_{Outros}) {=} P(E|F_O) * P(F_O) {=} 0{,}1{*}0{,}05{=}0{,}005$

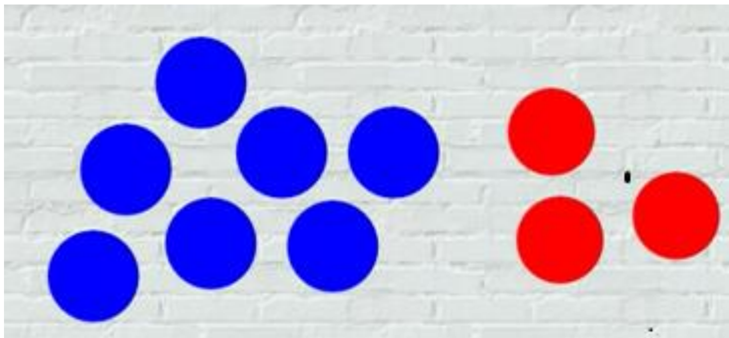
$P(F_{Outros}|E) = 1 - [P(F1|E){+}P(F2|E)]$ $\quad P(E|F_1) = \dfrac{P(E \cap F_1)}{P(F_1)} = \dfrac{0{,}6/0{,}05}{0{,}5} = \dfrac{0{,}03}{0{,}5} = 0{,}06$

$$P(F_1|E) = \frac{P(F_1 \cap E)}{P(E)} \Leftrightarrow P(F_1 \cap E) = P(F_1|E) * P(E){=}0.6{*}0.05{=}0.03$$

$$P(F_O|E) = \frac{P(F_O \cap E)}{P(E)} \Rightarrow P(E) = \frac{P(F_O \cap E)}{P(F_O|E)} = \frac{0{,}005}{0{,}1} = 0.05$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

7. Acontecimentos independentes



Experiência aleatória-. retirar duas bolas desta caixa **com reposição**

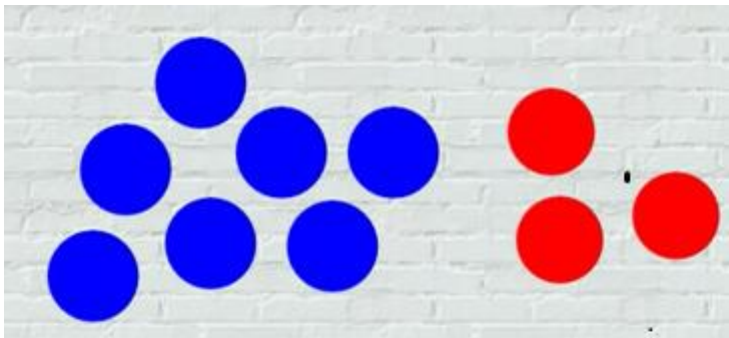
$$P({\color{blue}\bullet}\ {\color{red}\bullet}) = P(1^{\underline{a}}\,{\color{blue}\bullet}) * P(2^{\underline{a}}\,{\color{red}\bullet} \mid 1^{\underline{a}}\,{\color{blue}\bullet}) = \frac{7}{10} * \frac{3}{10} = \frac{21}{100}$$

$$P({\color{blue}\bullet}) * P({\color{red}\bullet}) = \frac{7}{10} * \frac{3}{10} = \frac{21}{100}$$

Acontecimentos ${\color{blue}\bullet}$ e ${\color{red}\bullet}$ dizem-se independentes

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

7. Acontecimentos independentes



Experiência aleatória-. retirar duas bolas desta caixa **sem reposição**

$$P({\color{blue}\bullet}\ {\color{red}\bullet}) = P(1^{\text{a}}\,{\color{blue}\bullet}) * P(2^{\text{a}}\,{\color{red}\bullet} \mid 1^{\text{a}}\,{\color{blue}\bullet}) = \frac{7}{10} * \frac{3}{9} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$$

$$P({\color{blue}\bullet}) * P({\color{red}\bullet}) = \frac{7}{10} * \frac{3}{10} = \frac{21}{100}$$

$$P({\color{blue}\bullet}\ {\color{red}\bullet}) \neq P({\color{blue}\bullet}) * P({\color{red}\bullet})$$

Acontecimentos ${\color{blue}\bullet}$ e ${\color{red}\bullet}$ dizem-se dependentes

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

7. Acontecimentos independentes

Definição 2.12 – Acontecimentos independentes
Dois acontecimentos A e B, do mesmo espaço de resultados, dizem-se independentes, se e só se

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Esta definição é válida para $P(A) \geq 0$ e $P(B) \geq 0$. Assim, se A for tal que $P(A) = 0$, então A é independente de qualquer outro acontecimento e, em particular, é independente de Ø e de Ω .

Teorema 2.3
Se A e B forem acontecimentos independentes, então,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A) \text{ se } P(B) > 0$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis traduzem relações diferentes:

- Se $P(A) = 0$, já foi dito que A é independente de qualquer outro acontecimento porque $A = \emptyset$ ("acontecimento impossível").

Com efeito, se $A = \emptyset \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0 = P(A) * P(B)$

A concorrência das duas situações (independência e incompatibilidade) somente se verifica nessa hipótese restrita.

- **A independência é uma propriedade da medida de probabilidade** e não uma propriedade dos acontecimentos. Não é possível caracteri-zar a independência meramente a partir dos acontecimentos.

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis traduzem relações diferentes:

- Se $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, os acontecimentos A e B, caso sejam incompatíveis $[A \cap B = \emptyset]$**não podem ser independentes**, porquanto, $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) \times P(B)$.

- **A incompatibilidade é uma propriedade dos acontecimentos**, não da medida de probabilidade.

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- **Teorema 2.4 –** Se os acontecimentos A e B são independentes, também o são A e $\bar{B}$,$\bar{A}$ e B, $\bar{A}$ e $\bar{B}$.

Por exemplo:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \times P(B) = P(A)\big(1 - P(B)\big)$$
$$= P(A) \times P(\bar{B})$$

Quando se consideram três acontecimentos, A, B e C, podem ocorrer as seguintes situações:

Os acontecimentos são dois a dois independentes e

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C).$$

Os acontecimentos são dois a dois independentes e

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C).$$

Verifica-se $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$ mas A e B ou A e C ou B e C dependentes .

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- Ex.2.39: Quatro bolas (1, 2, 3,4). Retira-se uma bola e regista-se o número. Sejam acontecimentos $A = \{1,2\}, B = \{1,3\}, C = \{1,4\}$.

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/2;$$

$P(A \cap B) = 1/4 = P(A) \times P(B), P(A \cap C) = 1/4 = P(A) \times P(C), P(B \cap C) = 1/4 = P(B) \times P(C)$ mas

$$P(A \cap B \cap C) = 1/4 \neq P(A) \times P(B) \times P(C) = 1/8$$

Ex.2.40: Uma moeda regular é lançada 3 vezes.

Sejam os acontecimentos: $\Omega = \{CCC, CCF, \cdots, FFF\}$ $\# \Omega = 8$

$A = \{CCC, FCC, CFF, \boldsymbol{FFF}\}, B = \{CCF, CFC, FFC, \boldsymbol{FFF}\}, C = \{CCF, CFC, FCF, \boldsymbol{FFF}\}$.

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/2\,;$$

$P(A \cap B \cap C) = 1/8 = P(A) \times P(B) \times P(C) = 1/8$ mas

$$P(B \cap C) = 3/8 \neq P(B) \times P(C) = 1/4$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

- Exemplo: : Uma moeda regular é lançada 3 vezes

$$\Omega = \{CCC, CCF, CFC, CFF, FCC, FCF, FFC, FFF\}$$

Sejam os acontecimentos: $A = \{CCC, FCC, CCF, FFF\}$,
$B = \{CCF, CFC, FCC, CFF\}$ e $C = \{CCC, CFF, CCF, FFF\}$.

Então: $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$

$A \cap B = \{FCC, CCF\}$; $A \cap C = \{CCC, FFF\}$; $B \cap C = \{CCF, CFF\}$;
$A \cap B \cap C = \{CCF\}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \times P(B)$; $P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A) \times P(C)$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B) \times P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8} = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

CAPÍTULO 1(2) – PROBABILIDADE

Definição 2.13 – Independência completa ou mútua

Os acontecimentos A, B e C do mesmo espaço de resultados dizem-se completamente independentes ou mutuamente independentes se e só se verificarem as condições seguintes:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B), P(A \cap C) = P(A).P(C), P(B \cap C) = P(B).P(C)$$

e

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

Definição 2.14 – Independência condicional

Dois acontecimentos A e B são independentes condicionalmente em relação a um acontecimento C quando,

$$P(A \cap B|C) = P(A|C).P(B|C)$$

A independência condicional **não** implica independência no sentido corrente a não ser obviamente quando $C = \Omega$.

Ω
.

Questões sobre a aula anterior

1. Se A_1, A_2, A_3 constituem uma partição do espaço de resultados, então são acontecimentos mutuamente independentes.

2. Se $P(A) = 0.55, P(B) = 0.35\ e$ $P(A - B) = 0.55,$ então A e B constituem uma partição de Ω.